2024 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三)试题

一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则 $f(x)$（　　）

（A）在 $x=1, x=-1$ 处均连续.

（B）在 $x=1$ 处连续，$x=-1$ 处不连续.

（C） 在 $x=1, x=-1$ 处均不连续.

（D）在 $x=1$ 处不连续，$x=-1$ 处连续.

【答案】（D）

（2）设 $\mathrm{I}=\int_{\alpha}^{\alpha+k\pi}|\sin x|dx$，k 为整数，则 I 的值（　　）

（A）只与 α 有关　　（B）只与 k 有关

（C）与 α 和 k 均有关　　（D）与 α 和 k 均无关

【答案】（B）

（3）已知 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$（　　）

（A） $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$　　（B） $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

（C） $\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$　　（D） $\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

【答案】（A）

（4）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_{2n}=$

（A） $-\dfrac{1}{6}$.　　（B） $-\dfrac{1}{3}$.

（C） $\dfrac{1}{6}$.　　（D） $\dfrac{1}{3}$.

【答案】（A）

（5）已知 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经正交变换化为 $\boldsymbol{y}_1^2-2\boldsymbol{y}_2^2+3\boldsymbol{y}_3^2$，则二次型对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式和迹分别为（　　）

（A）$-6,-2$.

（B）$6,-2$.

（C）$-6,2$.

（D）$6,2$.

【答案】（C）

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

（B）$\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$.

（D）$\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$.

【答案】（C）

（7）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a+1&b&3\\a&\frac{b}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_{ij}$ 为 a_{ij} 的余子式，若 $|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{2}$ 且 $-\boldsymbol{M}_{21}+\boldsymbol{M}_{22}-\boldsymbol{M}_{23}=0$，则（　　）

（A）$a=1$ 或 $a=-\frac{3}{2}$.

（B）$a=0$ 或 $a=\frac{3}{2}$.

（C）$b=1$ 或 $b=-\frac{1}{2}$.

（D）$b=-1$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

【答案】（B）

（8）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，则 X 的三阶中心矩 $E(X-EX)^3=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{32}$.　　（B）0.　　（C）$\dfrac{1}{10}$.　　（D）$\dfrac{1}{2}$.

【答案】（B）.

（9）设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,2)$，$Y\sim N(-1,1)$，记 $p_1=P\{2X-Y>0\}$，$p_2=P\{X-2Y>1\}$，则（　　）

（A）$p_1>p_2>\dfrac{1}{2}$.　　（B）$p_2>p_1>\dfrac{1}{2}$.

（C）$p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$.　　（D）$p_2<p_1<\dfrac{1}{2}$.

【答案】（B）.

（10）设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$，则下列随机变量与 Z 同分布的是（　　）

（A）$X+Y$.　　（B）$\dfrac{X+Y}{2}$.　　（C）$2X$.　　（D）X.

【答案】（D）.

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

（11）$x\to 0$ 时，$\int_0^x \dfrac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$_________.

【答案】3

（12）$\int_2^{+\infty}\dfrac{5}{x^4+3x^2-4}dx=$

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{\pi}{8}$.

（13）$z=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是________.

【答案】(1,1)

（14）设某商品价格 $P=\begin{cases}25-0.25Q, Q\le 20\\ 35-0.75Q, Q>20\end{cases}$，其中 Q 为产量，总成本函数 $C=150+5Q+0.25Q^2$，求利润的最大值为_______万元.

【答案】50

（15）A 为 3 阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，E 为单位矩阵，且 $r(2E-A)=1, r(E+A)=2,$

则 $\left|A^*\right|=$________.

【答案】16

（16）设随机试验每次成功的概率为 p，进行 3 次独立重复试验，在至少试验成功 1 次的条件下三次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 $p=$________.

【答案】$\frac{2}{3}$.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）（本题满分 10 分）区域 D 位于第一象限，由 $xy=\frac{1}{3}, xy=3, y=\frac{1}{3}x, y=3x$ 围成，计算 $\iint\limits_{D}(1+x-y)dxdy$

【答案】$\frac{8}{3}\ln 3$.

（18）（本题满分 12 分）函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+e^x-y\ln(1+z^2)=0$ 确定，求 $\left.\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{(0,0)}$.

【答案】$-1-2\ln 2$.

（19）（本题满分 12 分）设 $t>0$，平面区域 D 由曲线 $y=xe^{-2x}$ 与直线 $x=t$，$x=2t$ 及 x 轴围成，记区域 D 的面积为 $S(t)$，求 $S(t)$ 的最大值.

【答案】$\frac{1}{16}\ln 2+\frac{3}{64}$.

（20）（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=f'(1)$，$\left|f''(x)\right|\le 1$，证明：

（1）$x\in(0,1)$，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\frac{x(1-x)}{2}$.

（2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$

【答案】由泰勒公式可证

（21）（本题满分 12 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a & a-1\\ 2 & -3 & 2 & -2\end{pmatrix}$，向量

$\alpha=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

（1）证明方程组 $Ax=\alpha$ 的解是 $Bx=\beta$ 的解.

（2）若方程组 $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 有不同的解，求 a.

【答案】

（1）将方程组 $Ax=\alpha$ 的解求出，代入 $Bx=\beta$，满足题意即可。

（2）$a=1$

（22）（本题满分 12 分）设总体 X 服从 $[0,\boldsymbol{\theta}]$ 上的均匀分布，其中 $\boldsymbol{\theta}\in(0,+\infty)$ 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots X_n\}$，$T_c=cX_{(n)}$.

（1）求 c，使得 $E(T_c)=\boldsymbol{\theta}$.

（2）记 $h(c)=E(T_c-\boldsymbol{\theta})^2$，求 c 使得 $h(c)$ 最小.

【答案】（1）$\dfrac{n+1}{n}$；（2）$\dfrac{n+2}{n+1}$.