2024 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数（　　）．

（A）3　（B） 2　（C） 1　（D） 0

【答案】 C

（2）函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+t^3 \\ y=e^{t^2} \end{cases}$ 确定，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f(2)\right]=$（　　）．

（A） $2e$　（B） $\dfrac{4}{3}e$　（C） $\dfrac{2}{3}e$　（D） $\dfrac{e}{3}$

【答案】 B

（3）设函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3dt$， $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）．

（A） $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为奇函数

（B） $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数

（C） $f(x)$ 为偶函数， $g(x)$ 为偶函数

（D） $f(x)$ 为偶函数， $g(x)$ 为奇函数

【答案】D

（4）已知数列 $\{a_n\}(a_n\neq 0)$，若 $\{a_n\}$ 发散，则

（A） $\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\}$ 发散　（B） $\{a_n-\dfrac{1}{a_n}\}$ 发散

（C） $\{e^{a_n}+\dfrac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散　（D） $\{e^{a_n}-\dfrac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散

【答案】D

（5）设已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0.\end{cases}$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处

（A）$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续，$f(x,y)$可微. （B）$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续，$f(x,y)$不可微.

（C）$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续，$f(x,y)$可微. （D）$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续，$f(x,y)$不可微.

【答案】C.

（6）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$ （B）$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

（C）$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$ （D）$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

【答案】A

（7）设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，给出以下三个命题：

1. 若 $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
2. 若存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$ 存在，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
3. 若 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$ 存在

其中真命题的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】B

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

【答案】C

（9） A 为4阶矩阵,若 $A(A-A^*)=0$,且 $A\neq A^*$ ，则 r(A) 可能为

（A）0 或 1　　（B）1 或 3

（C）2 或 3　　（D）1 或 2

【答案】D

（10）设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 2 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则“ $\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的特征值 ”是“ $\boldsymbol{B}$ 可对角化”的（　　）.

（A）充分必要条件　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】B

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）曲线 $y^2=x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为

【答案】$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

（12）设 $\mathrm{f}(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是

【答案】$(1,1)$.

（13）已知微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$，满足 $y(1)=0$ 的解为

【答案】$y+\dfrac{\pi}{4}=\arctan(x+y)$.

（14）函数 $f(x)=x^2(\mathrm{e}^x+1)$，求 $f^{(5)}(x)=$

【答案】$31\mathrm{e}$.

（15）某物体以速度 $v(t)=t+k\sin\pi t$ 作直线运动，若它从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度为 $\dfrac{5}{2}$，则 $k=$

【答案】$\dfrac{3}{2}\pi$.

（16）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则$ab=$

【答案】-4.

三、解答题：17～22 小题, 共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）已知函设平面有界区域D位于第一象限, 由曲线$xy=\frac{1}{3},xy=3$与直线$y=\frac{1}{3}x,y=3x$围成的平面区域，计算$\iint\limits_D(1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【答案】$\frac{8}{3}\ln 3$.

（18）（本题满分 12 分）已知$y(x)$满足$x^2y''+xy'-9y=0$，满足$y(1)=2,y'(1)=6$.

（1）利用变换$x=\mathrm{e}^t$将上述方程化为常系数线性方程，并求$y(x)$；

（2）计算$\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

【答案】（1）$y(x)=2x^3$；（2）$\frac{22}{5}\sqrt{3}$.

（19）（本题满分 12 分）设$t>0$, 平面有界区域D由曲线$y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x},x=t,x=2t$及$x$轴围成, D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积为$V(t)$, 求$V(t)$的最大值.

【答案】最大值为$V(\ln 2)=\frac{\pi\ln 2}{16}+\frac{3\pi}{64}$.

（20）（本题满分 12 分）已知$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$满足$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

（1）求$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$；

（2）若$\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=u\mathrm{e}^{-u}$, $f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$，求$f(u,v)$的表达式.

【答案】（1）$\frac{1}{25}$；（2）$f(u,v)=\frac{1}{25}uv-(u+1)\mathrm{e}^{-u}+\frac{1}{50}v^2$.

（21）（本题满分 12 分）设函数$f(x)$具有 2 阶导数, 且$f'(0)=f'(1),|f''(x)|\leqslant 1$. 证明:

（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\leqslant\dfrac{x(1-x)}{2}$；

（2）$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{12}$.

【答案】（1）泰勒公式在 0 和 1 处展开即可证明；（2）由（1）的不等式两边积分即可证出.

（22）（本题满分 12 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & b\end{pmatrix}$，$Ax=0$ 的解均为 $B^T x=0$ 的解，但 $Ax=0$ 与 $B^T x=0$ 不同解.

（1）求 a,b 的值；

（2）求正交变换 $x=Qy$，使 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T BAx$ 为标准形.

【答案】（1）$a=1,b=2$；（2）$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=6y_1^2$.