2024 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$， $g(x)=\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，则

（A） $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数.　（B） $f(x)$ 为偶函数， $g(x)$ 为奇函数 .

（C） $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数.　（D） $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数.

【答案】（C）

（2）设 $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$

（A） $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　（B） $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（C） $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　（D） $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【答案】（A）

（3）已知幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

（A） $-\frac{1}{6}$.　（B） $-\frac{1}{3}$.　（C） $\frac{1}{6}$.　（D） $\frac{1}{3}$.

【答案】（A）

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$ 时， $f'(0)=m$.

（B）当 $f'(0)=m$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$.

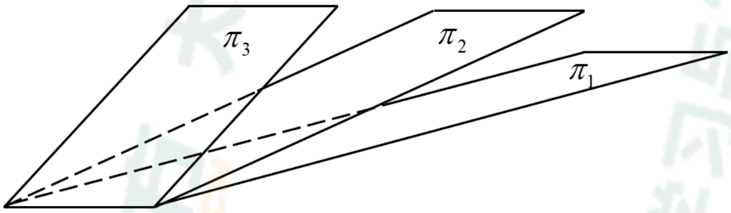
（C）当 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$ 时， $f'(0)=m$.

（D）当 $f'(0)=m$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$.

【答案】（B）

（5）在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三张平面 π_i：$a_i x+b_i y+c_i z=d_i$ $(i=1,2,3)$ 位置关系如图所示，记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$，

若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=n$，则



（A）$m=1,n=2$.　　（B）$m=n=2$.

（C）$m=2$，$n=3$.　　（D）$m=n=3$.

【答案】（B）

（6）设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若 α_1，α_2，α_3 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

（A）$a=1,b\neq-1$　　（B）$a=1,b=-1$

（C）$a\neq-2,b=2$　　（D）$a=-2,b=2$

【答案】（D）

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 的非零向量，若对满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 的任意向量 $\boldsymbol{\beta}$，均有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}$，则

（A）$\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 2.　　（B）$\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 5.

（C）$\boldsymbol{A}^5$ 的迹为 7.　　（D）$\boldsymbol{A}^5$ 的迹为 9.

【答案】（A）

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 是服从 $N(0,2)$ 的正态分布，Y 是服从 $N(-2,2)$ 的正态分布，若 $P\{2X+Y<a\}=P\{X>Y\}$，则 $a=$

（A）$-2-\sqrt{10}$　　（B）$-2+\sqrt{10}$　　（C）$-2-\sqrt{6}$　　（D）$-2+\sqrt{6}$

【答案】（B）

（9）设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，在 $X=x$ 的条件下，Y在区间（x, 1）上服从均匀分布，则 $\mathrm{cov}(X,Y)=$

（A）$-\frac{1}{36}$　　（B）$-\frac{1}{72}$

（C）$\frac{1}{72}$　　（D）$\frac{1}{36}$

【答案】(D)

（10）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$，则下列与 Z 服从同一分布的是

（A）$X+Y$　　（B）$\dfrac{X+Y}{2}$　　（C）$2X$　　（D）X

【答案】(D)

二、填空题：11～16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

（11）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$

【答案】6

（12）$z=f(u,v)$ 有二阶连续导数，$\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$，$y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$

【答案】5

（13）若函数 $f(x)=x+1$，若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，$x\in[0,\pi]$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$

【答案】$-\dfrac{1}{\pi}$

（14）微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$，满足条件 $y(1)=0$ 的解为

【答案】$x=\tan(y+\dfrac{\pi}{4})-y$.

（15）设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$，若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，

$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2\leqslant\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 都成立，则 a 的取值范围

【答案】$a\geqslant 0$.

（16）随机试验每次成功的概率为 p，现进行三次独立重复实验，已知至少成功一次的条件下全部成功的概率为 $\dfrac{4}{13}$，则 p=

【答案】$\frac{2}{3}$

三、解答题：17～22 小题, 共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\big|\sqrt{1-y^2}\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$，计算 $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$．

【答案】$\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-2$

（18）（本题满分 12 分）设 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面为 T，T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的投影为 D

（1）求 T 的方程

（2）求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值

【答案】切平面 $x+y+z=3$；最大值 21，最小值 $\frac{17}{27}$

（19）设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=f'(0),\left|f''(x)\right|\le 1$，证：

1）$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\frac{x(1-x)}{2}$．

2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$

【答案】1)泰勒公式

2)把 1）代入

（20）（本题满分 12 分）已知有向曲线 $\boldsymbol{L}$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 $2x-z-1=0$ 的交线从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分

$$\int_L (6xyz-yz^2)\mathrm{d}x+2x^2z\mathrm{d}y+xyz\mathrm{d}z$$

【答案】$\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

（21）（本题满分 12 分）已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1, y_0=0, z_0=2,$ 且 $\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$，记 $\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$，写出满足 $\alpha_n=A\alpha_{n-1}$ 的矩阵 A，并求 A^n 及 $x_n,y_n,z_n(n=1,2,\cdots)$.

【答案】$A=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}$，$A^n=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}2^n&-2+(-1)^{n+1}2^n&2\\4+(-1)^n2^{n+1}&2+(-1)^n2^{n+1}&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}$，

$x_n=8+(-2)^n, y_n=-8+(-2)^{n+1}, z_n=12.$

（22）（本题满分 12 分）设总体 $X\sim U(0,\theta)$，θ 未知，$X_1,X_2\cdots X_n$ 为简单随机样本，$X_{(n)}=\max(X_1,X_2\cdots X_n)$，$T_c=cX_{(n)}$.

（1）求 c 时，使得 T_c 为 θ 的无偏估计.

（2）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求 c 使得 $h(c)$ 取最小值.

【答案】（1）$c=\dfrac{n+1}{n}$；（2）$c=\dfrac{n+2}{n+1}$.